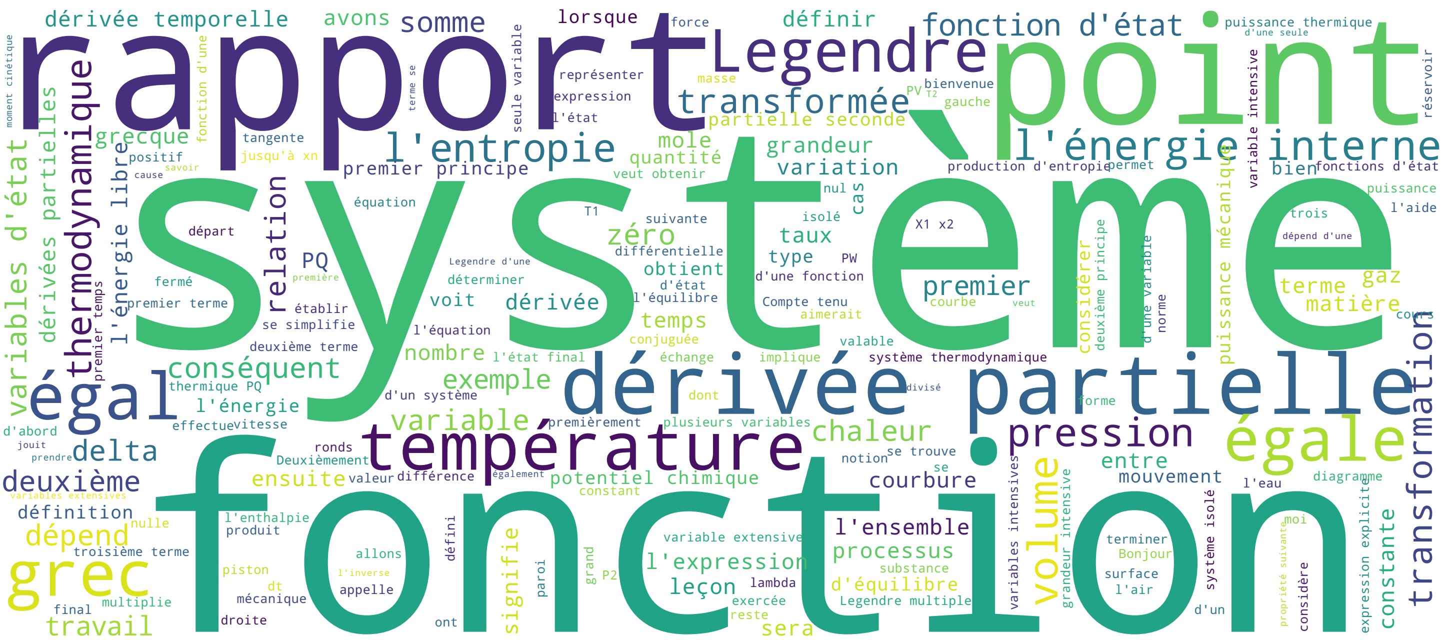
RESCIF
Réseau d'excellence des sciences de l'ingénieur de la Francophonie

Thermodynamique

Transformations de Legendre

Dr. Sylvain Bréchet

Hermann Ludwig Ferdinand von Helmoltz, 1821 - 1894



Search MOOC

Video

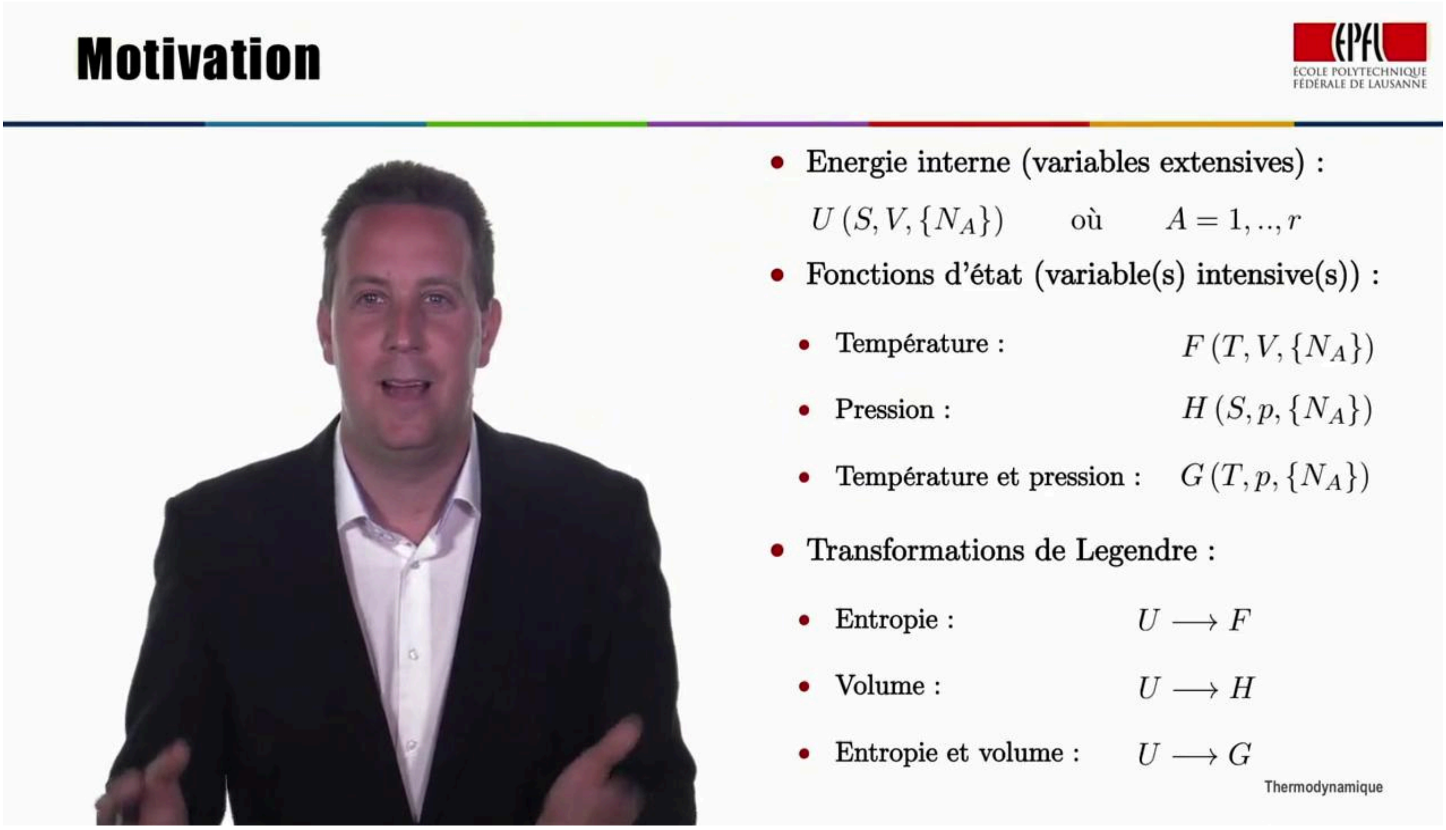
EPFL

Bonjour et bienvenue à ce mot de thermodynamique. Cette leçon est consacrée aux transformations de Legendre. Dans un premier temps, on va motiver physiquement ces transformations de Legendre qui sont d'ordre mathématique. Dans un deuxième temps, on va établir la transformée de Legendre d'une fonction d'une seule variable. On va ensuite dans un troisième temps étendre ceci à une fonction de plusieurs variables. Et puis, dans un quatrième temps, on va établir un lien explicite entre les transformées de Legendre et leur courbures et pour terminer, on va définir une transformée de Legendre multiple.

Notes

Summary

0m 05s

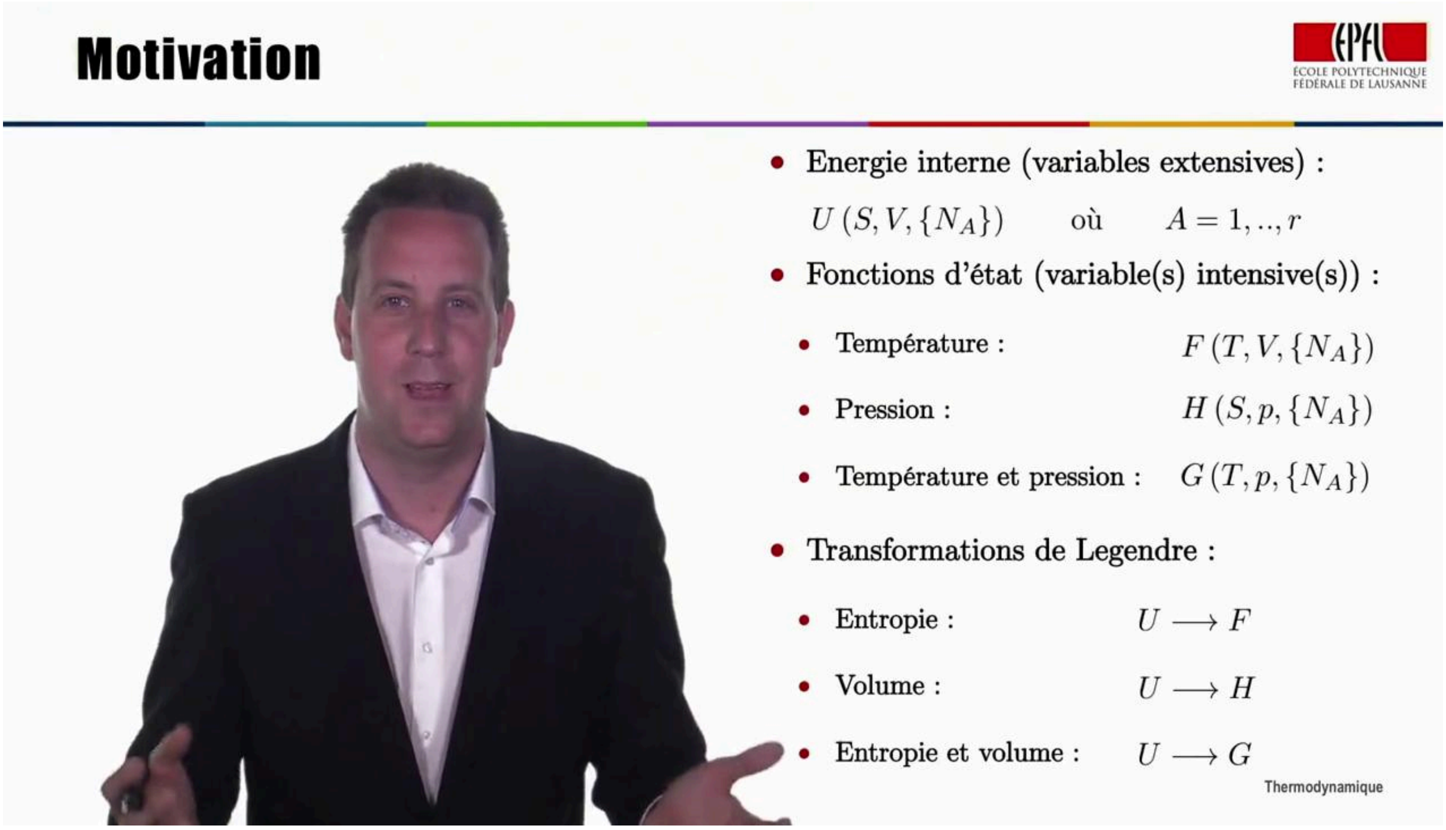


l'Énergie interne joue un rôle capital en thermodynamique. l'Énergie interne, c'est une fonction d'état de variable extensive. U est fonction de l'entropie S, du volume V et de l'ensemble des nombres de moles des différentes substances du système. On aimerait obtenir des fonctions d'état qui ont la même dimension physique que l'énergie interne. Ce sont donc d'autres formes d'énergie qui dépendent d'une ou de plusieurs variables intensives. On aimerait par exemple une fonction d'état qui dépend de la température. Appelons cette fonction d'état la fonction f. F sera donc une fonction de T, de V et de l'ensemble DN. On aimerait aussi une fonction d'état qui dépend de la pression appelant cette fonction. H h sera alors une fonction de s, de p et de l'ensemble des normes. On aimerait également une fonction qui dépendent de la température et de la pression. Appelons cette fonction G. G sera donc fonction dotée de P et de l'ensemble des N1. Les fonctions F, H, LG. Sont obtenus par transformation de Legendre de l'énergie interne. On dit que c'est les transformées de Legendre. La transformation de Legendre de l'énergie interne U par rapport à l'entropie donne la fonction f qui dépend de la température.

Notes

Summary

0m 46s



La transformation de Legendre de l'énergie interne U par rapport aux volumes donne la fonction H qui dépend de la pression P. Et la transformation de Legendre de l'énergie interne U par rapport à l'entropie et au volume donne la fonction G qui dépend de la température T et de la pression P.

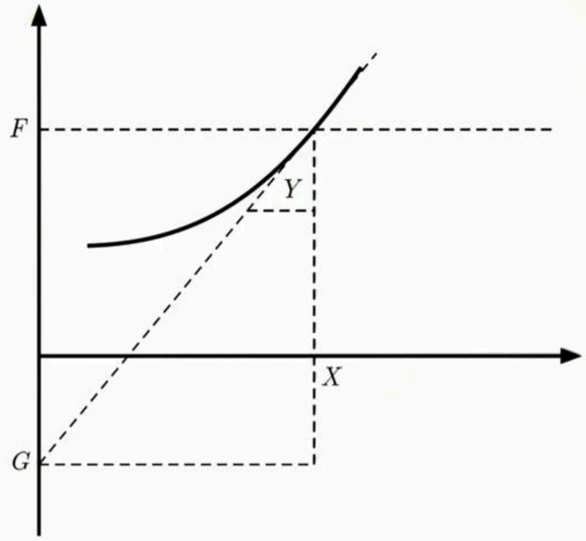
Notes

Summary

2m 23s

Fonction d'une variable

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE



- Fonction d'état (variable extensive):

  $F(X)$

- Transformée de Legendre (variable intensive) :

  $G(Y)$ où $F \longrightarrow G$

- Propriété :

  $$Y(X) = \frac{dF(X)}{dX}$$

- Identité :

  $$Y = \frac{F - G}{X - 0}$$

- Transformée de Legendre $G(Y)$ de $F(X)$:

  $$\boxed{G(Y) = F(X(Y)) - Y\,X(Y)}$$

Thermodynamique

On va maintenant déduire l'expression de la transformée de Legendre d'une fonction. Alors on prend une fonction d'état f qui dépend d'une seule variable x qui est une variable extensive, et on veut obtenir l'expression de la transformée de Legendre de F qui est la fonction G et qui dépend d'une variable intensive qui est I. I. Et la grandeur conjugué à X par rapport à f. Elle jouit donc de la propriété suivante i de X et la dérivée de f de x par rapport à x. On va maintenant représenter ceci sur un diagramme. Donc on a la fonction f de x. C'est la courbe qu'on voit ici. Et on trace une tangente à cette courbe en un point donné et cette tangente en traits tirés va intercepter l'axe vertical au point G, la pente de cette tangente, cette i grecque. Y grec est défini comme le rapport de la dénivellation, c'est à dire f moins g puisque g est négatif. Divisé par la distance horizontale, c'est à dire x. Moi zéro. À l'aide de cette identité, on peut maintenant obtenir une expression explicite de la transformée de Legendre G de I grecque de la fonction f de x ou x est fonction de i grec g de i grec sept, f de x de y grec y grec fois x y grec.

Notes

Summary

2m 49s

Courbure

- **Fonctions d'état** $F(X_1, .., X_i, .., X_n)$ **et** $G(X_1, .., Y_i, .., X_n)$:

$$G(X_1, .., Y_i, .., X_n) = F\Big(X_1, .., X_i(X_1, .., Y_i, .., X_n), .., X_n\Big) - Y_i\, X_i(X_1, .., Y_i, .., X_n)$$
$$F(X_1, .., X_i, .., X_n) = G\Big(X_1, .., Y_i(X_1, .., X_i, .., X_n), .., X_n\Big) + X_i\, Y_i(X_1, .., X_i, .., X_n)$$

- **Dérivées partielles :**

$$\frac{\partial G}{\partial Y_i} = \frac{\partial F}{\partial X_i}\frac{\partial X_i}{\partial Y_i} - X_i - Y_i\frac{\partial X_i}{\partial Y_i} = -X_i$$
$$\frac{\partial F}{\partial X_i} = \frac{\partial G}{\partial Y_i}\frac{\partial Y_i}{\partial X_i} + Y_i + X_i\frac{\partial Y_i}{\partial X_i} = Y_i$$

- **Courbure (dérivées partielles secondes) :**

$$\frac{\partial^2 G}{\partial Y_i^2} = -\frac{\partial X_i}{\partial Y_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial X_i^2} = \frac{\partial Y_i}{\partial X_i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 G}{\partial Y_i^2} = -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X_i^2}\right)^{-1}}$$

Thermodynamique

Ce résultat, on peut maintenant le généraliser à une fonction de plusieurs variables. On prend donc une fonction d'état f. Qui est fonction de n variables extensives X1, x2, etc jusqu'à XN et on veut obtenir la transformée de Legendre de la fonction f par rapport à la variable x y. La nouvelle variable, c'est la variable i de la variable i grecque i. C'est une variable intensive. Toutes les autres variables, toutes les autres x sont inchangées. Il y a donc au moins une variable extensive dans l'expression de G, qui est une grandeur intensive qui est conjuguée à x y. Par définition, elle jouit donc de la propriété suivante. I grec i est égale à la dérivée partielle de f par rapport à x y. On pourrait aussi représenter ceci sur un graphique et on aurait exactement la même situation que pour une fonction d'une variable, à part pour le fait qu'on remplace x par x y et y grecs par y grec, ce qui nous donne l'identité suivante i i égal f g divisé par x zéro. On peut donc énoncer l'expression de la transformée explicite de Legendre g de f g est égal à f moins i i x y. On peut également lier les courbures de deux fonctions qui sont liées par une transformation de Legendre.

Notes

Summary

4m 31s

Courbure

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

- **Fonctions d'état** $F\left(X_1,..,X_i,..,X_n\right)$ **et** $G\left(X_1,..,Y_i,..,X_n\right)$:

$$G\left(X_1,..,Y_i,..,X_n\right) = F\Big(X_1,..,X_i\left(X_1,..,Y_i,..,X_n\right),..,X_n\Big) - Y_i\,X_i\left(X_1,..,Y_i,..,X_n\right)$$
$$F\left(X_1,..,X_i,..,X_n\right) = G\Big(X_1,..,Y_i\left(X_1,..,X_i,..,X_n\right),..,X_n\Big) + X_i\,Y_i\left(X_1,..,X_i,..,X_n\right)$$

- **Dérivées partielles :**

$$\frac{\partial G}{\partial Y_i} = \frac{\partial F}{\partial X_i}\,\frac{\partial X_i}{\partial Y_i} - X_i - Y_i\,\frac{\partial X_i}{\partial Y_i} = -\,X_i$$
$$\frac{\partial F}{\partial X_i} = \frac{\partial G}{\partial Y_i}\,\frac{\partial Y_i}{\partial X_i} + Y_i + X_i\,\frac{\partial Y_i}{\partial X_i} = Y_i$$

- **Courbure (dérivées partielles secondes) :**

$$\frac{\partial^2 G}{\partial Y_i^2} = -\,\frac{\partial X_i}{\partial Y_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial X_i^2} = \frac{\partial Y_i}{\partial X_i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 G}{\partial Y_i^2} = -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X_i^2}\right)^{-1}}$$

Thermodynamique

Ces fonctions sont les fonctions f. Et g. G. Est égal à f moins i x y. Et donc f est égal à. J'ai plus x y qui. Compte tenu de la dépendance en termes de variables d'état de ces deux fonctions, on peut maintenant déterminer les dérivées partielles de ces fonctions. La dérivée partielle de g par rapport à i i premièrement est égale à la dérivée partielle de f par rapport à x y fois la dérivées partielles de x y par rapport à i y moins ici moins y i qui multiplie la dérivée partielle de x par rapport à i requis, et puis la dérivée partielle de f par rapport à x. Il s'agit donc la premier terme et le troisième terme se simplifie et nous reste le deuxième terme qui est égal à moins x. Deuxièmement, la dérivée partielle de f par rapport à x y. C'est la dérivée partielle de g par rapport à i qui voit la dérivée partielle de i par rapport à x plus y i plus x y pour la dérivée partielle de i grecque i par rapport à x. Et la dérivée partielle de g par rapport à i grec i, c'est moins x qui donc le premier terme et le troisième terme se simplifie. Il nous reste le deuxième terme qui est i grec. On peut maintenant calculer l'expression des courbures de ces deux fonctions par rapport à la variable sur laquelle on effectue la transformation de Legendre.

Notes

Summary

6m 07s

Courbure

- **Fonctions d'état** $F\left(X_1,..,X_i,..,X_n\right)$ **et** $G\left(X_1,..,Y_i,..,X_n\right)$:

$$G\left(X_1,..,Y_i,..,X_n\right)=F\Big(X_1,..,X_i\left(X_1,..,Y_i,..,X_n\right),..,X_n\Big)-Y_i\,X_i\left(X_1,..,Y_i,..,X_n\right)$$
$$F\left(X_1,..,X_i,..,X_n\right)=G\Big(X_1,..,Y_i\left(X_1,..,X_i,..,X_n\right),..,X_n\Big)+X_i\,Y_i\left(X_1,..,X_i,..,X_n\right)$$

- **Dérivées partielles :**

$$\frac{\partial G}{\partial Y_i}=\frac{\partial F}{\partial X_i}\,\frac{\partial X_i}{\partial Y_i}-X_i-Y_i\,\frac{\partial X_i}{\partial Y_i}=-\,X_i$$
$$\frac{\partial F}{\partial X_i}=\frac{\partial G}{\partial Y_i}\,\frac{\partial Y_i}{\partial X_i}+Y_i+X_i\,\frac{\partial Y_i}{\partial X_i}=Y_i$$

- **Courbure (dérivées partielles secondes) :**

$$\frac{\partial^2 G}{\partial Y_i^2}=-\,\frac{\partial X_i}{\partial Y_i}\quad\text{et}\quad\frac{\partial^2 F}{\partial X_i^2}=\frac{\partial Y_i}{\partial X_i}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\frac{\partial^2 G}{\partial Y_i^2}=-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X_i^2}\right)^{-1}}$$

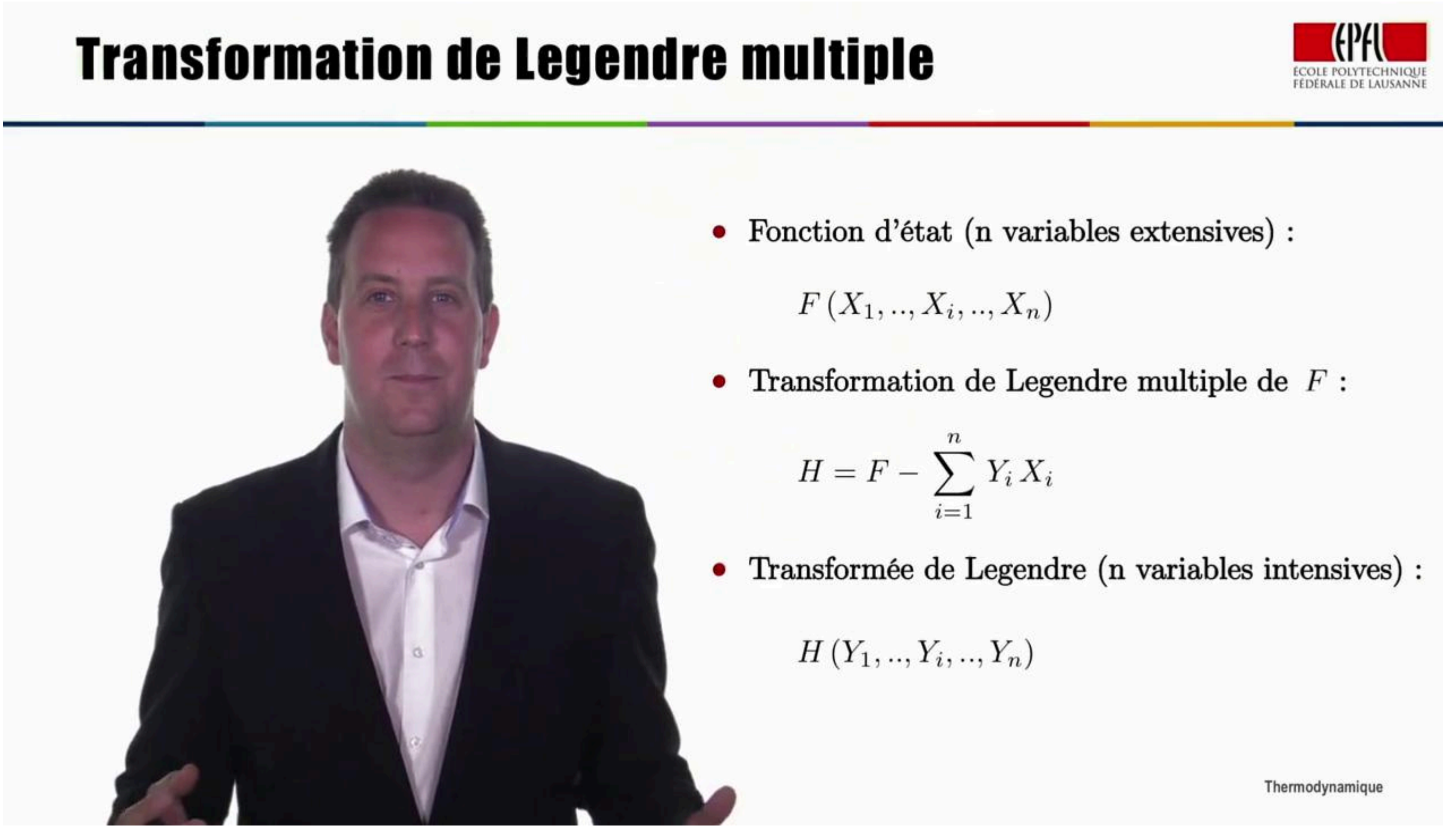
Thermodynamique

La courbure, c'est la dérivée partielle seconde. Donc la dérivée partielle seconde de g par rapport à i grec i est égale à la dérivée partielle de x par rapport à i i. Et puis, de manière analogue, la dérivées partielles secondes de f par rapport à x y est égale à la dérivée partielle de i par rapport à x. Par conséquent, on en conclut que la dérivée partielle seconde de g par rapport à i grec y est égale à moins l'inverse de la dérivée partielle seconde de f par rapport à x. En d'autres termes, si on effectue une transformation de Legendre, la courbure de la transformée de Legendre a le signe opposé à la fonction de départ et sa norme est égale à l'inverse de la norme de la fonction de départ.

Notes

Summary

7m 46s



Pour terminer. On va définir une transformation de Legendre multiple. On considère une fonction d'états de n variables extensives. Cette fonction, c'est la fonction f qui dépend de x1 x2 jusqu'à xn. Et on effectue une transformation de Legendre. Au final, on obtient la fonction H qui est égale à f mois, la somme de y égal à n de y x et cette fonction H. Qui est la transformée de Legendre multiple dépend de n variables intensives. H est donc fonction de i grec, i grec deux etc jusqu'à y grecque, n.

Notes

Summary

8m 37s